E.T.S. DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO. $2^{\underline{0}}$ CURSO Y ADAPTACIÓN 2010/2011

PRÁCTICA 3

3.1

(i) Integrar la ecuación diferencial $y' = y|y|$ y hacer, en esbozo, una representación gráfica de la curvas integrales.

(ii) Igual que en (i), para la ecuación $x^2y' = 2y^2 - xy$.

(iii) Dada la ecuación diferencial $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx = 0$, encontrar un valor de α tal que el cambio de variable $y = z^\alpha$ la transforme en una ecuación diferencial homogénea. Calcular la solución que pasa por el punto $(x_0, y_0) = (2, 2)$.

3.2

Integrar las siguientes ecuaciones:

(i) $y' + y + y^2(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$

(ii) $y' + \frac{2}{x^2-1}y = \frac{(x-1)e^{-x}}{6(x+1)}y^2$ con $x \in (-1, 1)$, y obtener la solución que satisface a $y(0) = 2$.

(iii) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$, $(y \geq 0)$

(iv) $xy' - y = \frac{2x}{x^4-1}(y^2 - x^2)$, sabiendo que admite soluciones particulares de la forma $y = ax + b$.

(v) $y'(x^3 + 2x^2) + y^2 - 3x^2y - 4x^3 = 0$, sabiendo que admite soluciones polinómicas de grados 1 y 2. Siendo $y = \varphi(x)$ la solución de dicha ecuación tal que $\varphi(-1) = -1$, hallar el valor de $\varphi(2)$.

3.3

(i) Determinar el lugar geométrico de los puntos en que las gráficas de las soluciones de: $y' = x+y^2$, tienen tangente horizontal. Demostrar que ninguno de ellos es punto de inflexión.

(ii) Determinar la curva que pasa por el punto $(5, 5)$ y es tal que la ordenada en cada punto P es igual a la distancia del origen a la recta normal a la curva en el punto P.

(iii) Hallar las trayectorias ortogonales de los siguientes haces de curvas:

$$x^2 + y^2 - 2cx = 1 \ , \quad cx^2 + y^2 = 1$$

donde c es, en ambos casos, un número real arbitrario.

(iv) Hallar la curva (o curvas), que pasando por el punto $(1, 3)$ sea tal que el área del triángulo formado por: la recta que une el origen de coordenadas con un punto cualquiera de ella, su tangente en dicho punto y el eje de ordenadas, valga 3.

(v) Obtener las curvas tales que la longitud de la perpendicular trazada a la tangente desde el origen es igual a la abscisa (en valor absoluto) del punto de contacto.

3.4

(i) ¿Qué condición necesaria y suficiente debe cumplirse para que la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ admita un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$?

(ii) Integrar la ecuación diferencial: $2xy^3\,dx + (5x^2y^2+3)\,dy = 0$, sabiendo que admite un factor integrante del tipo $\mu(y)$ y encontrar la solución particular que pasa por el punto $(x_0, y_0) = (2,-1)$.

(iii) Integrar la ecuación: $-\operatorname{sen} y(\cos x + \operatorname{sen} x)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$, encontrando previamente un factor integrante que sólo depende de x. Determinar la solución que pasa por el punto $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$.

(iv) Calcular la solución de: $(2x^2y - y^3x + 6x^3\sqrt{y})dx + (x^3 - 3y^2x^2 + \frac{x^4}{\sqrt{y}})dy = 0$, que verifica $y(1) = 1$.

3.5

Dada la ecuación integral $y(x) = 1 - 2e^{3x} - \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{x} y(t)dt$, se pide:

Escribir un problema de valor inicial para una ecuación diferencial, que sea equivalente al problema dado, y resolverlo.

3.6

(i) Se considera el problema de Cauchy: $(P)\left\{\begin{array}{l}\cos x\,dx + (y + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x)dy = 0\\ y(\pi/2) = 0\end{array}\right.$ y se pide:

(a) ¿Qué permite afirmar el teorema de existencia y unicidad en este problema (P)?

(b) Resolver (P).

(c) Dar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ admita un factor integrante que sea función de x.

(ii) Se considera el problema $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & -4x\sqrt{y}\\ y(0) & = & 1\end{array}\right.$, se pide:

(a) ¿Qué permite afirmar el teorema de Picard en este problema?

(b) Hallar, si existe, una expresión explícita de su solución, determinando el intervalo mayor en el que esté definida.

(iii) Discutir la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial dado por: $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \sqrt{y}\\ y(-1) & = & 0\end{array}\right.$.